PART4　2 次方程式の解と係数の関係

要点 ①　2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である。

ここで，$\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　とすると

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\quad}{\quad}=$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\quad}{\quad}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=$$

となる。

このように，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解の和 $\alpha+\beta$ と積 $\alpha\beta$ はともに実数となり，方程式の係数 a，b，c で表される。

> **2 次方程式の解と係数の関係**
>
> 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると
>
> $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

例　2 次方程式 $3x^2-4x-5=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{\quad}{\quad}=\quad,\quad \alpha\beta=\frac{\quad}{\quad}=$$

解と係数の関係は，$\alpha=\beta$，すなわち解が重解のときにも成り立つ。

要点 ②　2 次式の因数分解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，解と係数の関係を用いると

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\quad x+\quad\right)=a\{x^2\qquad x+\quad\}=a(x\qquad)(x\qquad)$$

よって，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解 α，β を用いて，2 次式 ax^2+bx+c を因数分解することができる。

2 次式の因数分解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

例　2 次式 x^2-4x+7 を複素数の範囲で因数分解する。

2 次方程式 $x^2-4x+7=0$ の解は

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 7}}{1}=2\pm\sqrt{-3}=2\pm\sqrt{3}\,i$$

よって

$$x^2-4x+7=\{x-(2+\sqrt{3}\,i)\}\{x-(2-\sqrt{3}\,i)\}=(x-2-\sqrt{3}\,i)(x-2+\sqrt{3}\,i)$$

要点 ③　2 数を解とする 2 次方程式

2 数 α，β を解とする 2 次方程式は

$=0$　　$(a\neq 0)$

の形で表される。このうち，x^2 の係数 a が 1 のものは

$=0$　すなわち　$=0$ と表される。

よって，次のことが成り立つ。

2 数 α，β を解とする 2 次方程式

2 数 α，β を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

例　2 数 3，-1 を解にもつ 2 次方程式を 1 つ作る。

2 数 3，-1 の

は $3+(-1)=2$　　は $3\cdot(-1)=-3$

よって x^2　x　$=0$

4 (1) 2次方程式 $x^2-x-5=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(i) $\alpha+\beta$　(ii) $\alpha\beta$　(iii) $\alpha^2+\beta^2$　(iv) $\alpha^3+\beta^3$

(2) 2次式 $2x^2+6x+3$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(3) 2数 $-1+4i$，$-1-4i$ を解にもつ2次方程式を1つ作れ。

Point Pickup

2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α, β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

対称式

a^2+b^2 のように，a と b を入れ替えてももとの式と変わらない式を，a，b の「対称式」という。a，b の対称式は，基本対称式 $a+b$，ab で表すことができる。

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ より

$a^2+b^2=$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ より

$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=$

2数 α，β を解とする2次方程式

2数 α，β を解とする2次方程式の1つは

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$　…　x^2-(2数の和)$x+$(2数の積)$=0$

第 3 講　PART4 確認問題

1　2 次方程式 $2x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad \alpha\beta=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

である。

2　2 次方程式 $x^2+2x-1=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{オ}$$

である。

3　2 次方程式 $x^2+x+3=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha^3+\beta^3=\boxed{カ}$$

である。

4　2 次式 $3x^2-4x-1$ を複素数の範囲で因数分解すると

$$3x^2-4x-1$$
$$=\boxed{キ}\left(x-\frac{\boxed{ク}+\sqrt{\boxed{ケ}}}{3}\right)\left(x-\frac{\boxed{ク}-\sqrt{\boxed{ケ}}}{3}\right)$$

である。

5　2 数 $2+i$，$2-i$ を解にもつ 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-\boxed{コ}x+\boxed{サ}=0$$

である。

PART4　2 次方程式の解と係数の関係

4　(1)　2 次方程式 $x^2-x-5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\alpha+\beta$　　(ii)　$\alpha\beta$　　(iii)　$\alpha^2+\beta^2$　　(iv)　$\alpha^3+\beta^3$

(2)　2 次式 $2x^2+6x+3$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(3)　2 数 $-1+4i$，$-1-4i$ を解にもつ 2 次方程式を 1 つ作れ。

[解答]

(1) (i)　解と係数の関係より　$\alpha+\beta=1$

(ii)　解と係数の関係より　$\alpha\beta=-5$

(iii)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-5)=1+10=11$

(iv)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot(-5)\cdot1=16$

(2)　2 次方程式 $2x^2+6x+3=0$ の解は $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-2\cdot3}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$

よって

$$2x^2+6x+3=2\left(x-\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(x+\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$$

(3)　2 数 $-1+4i$，$-1-4i$ の

和は　$(-1+4i)+(-1-4i)=-2$

積は　$(-1+4i)(-1-4i)=(-1)^2-(4i)^2=1+16=17$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$x^2-(-2)x+17=0$　　つまり　　$x^2+2x+17=0$

第 3 講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：2，ウ：5，エ：2

[解説]

$2x^2-3x+5=0$ において，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2} \quad \text{[A]}$$

$$\alpha\beta=\frac{5}{2}$$

[A]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

2 **[正解]** オ：6

[解説]

$x^2+2x-1=0$ において，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2,\quad \alpha\beta=-1$$

よって

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \quad \text{[B]}$$
$$=(-2)^2-2\cdot(-1)$$
$$=4+2=6$$

[B]　$\alpha^2+\beta^2$ を $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を用いて表す。
$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ より

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

3 **[正解]** カ：8

[解説]

$x^2+x+3=0$ において，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-1,\quad \alpha\beta=3$$

よって

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \quad \text{[C]}$$
$$=(-1)^3-3\cdot3\cdot(-1)$$
$$=8$$

[C]　$\alpha^3+\beta^3$ を $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を用いて表す。
$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ より

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

4

[正解] キ：3，ク：2，ケ：7

[解説]

2 次方程式 $3x^2-4x-1=0$ の解は

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot(-1)}}{3}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$$

よって

$$3x^2-4x-1$$

$$=3\left(x-\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$$ [D]

[D]　2 次式の因数分解
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

5

[正解] コ：4，サ：5

[解説]

2 数 $2+i$，$2-i$ の

和は　$(2+i)+(2-i)=4$

積は　$(2+i)(2-i)=4-i^2=4+1=5$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-4x+5=0$$ [E]

[E]　2 数 α，β を解とする 2 次方程式の 1 つは
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$